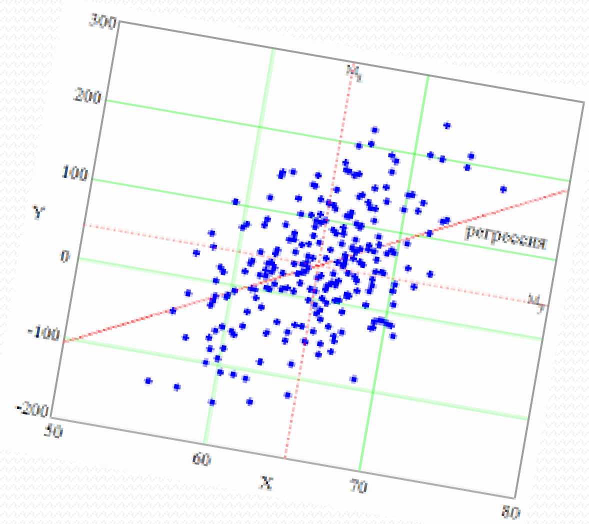
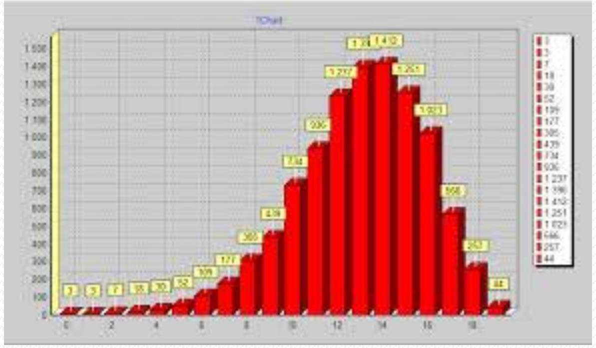
Характеристики дискретных случайные величины





Актуализация знаний

- Дайте определение случайной величины
- Дайте определение дискретной случайной величины
- Приведите примеры дискретных случайных величин
- Что такое закон распределения случайной величины?

Математическое ожидание

- ***Математическим ожиданием дискретной случайной*** величины называется сумма произведений значений случайной величины на вероятности этих значений.
- Если ДСВ характеризуется конечным рядом распределения,

x_i	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

- то математическое ожидание M(X) определяется по формуле

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n$$

Свойства математического ожидания

- Математическое ожидание постоянной С равно этой постоянной $M(C)=C$
- Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания $M(kX)=kX$
- Математическое ожидание суммы нескольких случайных величин равно сумме математических ожиданий этих величин

$$M(X+Y)=M(X)+M(Y)$$

- Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий этих величин

$$M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$$

Дисперсия

- ***Дисперсией случайной величины*** называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания.

$$D(X) = M(X - M(X))^2$$

- Дисперсия случайной величины это ***мера рассеяния ее значений около ее математического ожидания.***
- \Удобнее рассчитывать дисперсию по формуле

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$$

Свойства дисперсии

- Дисперсия неотрицательна
- Дисперсия постоянной равна нулю.

$$D(C)=0$$

- Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат:

$$D(kX)=k^2X$$

- Если X и Y - независимые случайные величины , то дисперсия суммы этих величин равна сумме их дисперсий

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$$

Среднее квадратическое отклонение

- ***Средним квадратическим отклонением случайной величины*** называется квадратный корень из ее дисперсии.

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

- Если отклониться от математического ожидания влево и вправо на среднее квадратическое отклонение, то на этом интервале будут «сконцентрированы» наиболее вероятные значения случайной величины.

Смысл числовых характеристик

- ***В теории игр***
- Математическое ожидание – *средневзвешенный* по вероятностям выигрыш.
- ***Математическое ожидание игрока не меняется!***
- Дисперсия характеризует стиль игры: игра с низкой дисперсией – это осторожная игра, игра с высокой дисперсией – авантюрный или агрессивный стиль игры.
- При увеличении ставок дисперсия тоже возрастает.

Мода ДСВ

- **Модой дискретной случайной величины** называется значение дискретной случайной величины, вероятность которого наибольшая.

Замечание.

Математическое ожидание и дисперсия числа появлений события в независимых испытаниях

Если вероятность появления события А в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания являются независимыми. Пусть эти вероятности одинаковы и равны p.

Тогда вероятность не наступления события А в испытании

$$q=1-p.$$

Теорема. Математическое ожидание числа появлений события А в независимых испытаниях равно произведению числа испытаний на вероятность появления события А в каждом испытании:

$$M(X) = n \cdot p$$

Теорема. Дисперсия числа появлений события А в независимых испытаниях равна произведению числа испытаний на вероятности появления и не появления события А в одном испытании:

$$D(X) = n \cdot p \cdot q$$

Пример № 1

Вычислить математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X, определяемой как количество студентов в наугад выбранной группе, используя следующие данные:

X	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*
P	*0,2*	*0,1*	*0,3*	*0,2*	*0,2*

$$M\left(X\right)=8\cdot 0{,}2+9\cdot 0{,}1+10\cdot 0{,}3+11\cdot 0{,}2+12\cdot 0{,}2=$$
$$=1{,}6+0{,}9+3+2{,}2+2{,}4=10{,}1;$$

$$D(X)=8^2\cdot 0{,}2+9^2\cdot 0{,}1+10^2\cdot 0{,}3+$$

$$+11^2\cdot 0{,}2+12^2\cdot 0{,}2-(10{,}1)^2=$$

$$=103{,}9-102{,}01=1{,}89;$$

$$\sigma(X)=\sqrt{1{,}89}=1{,}37.$$

Пример 2

- Закон распределения случайной величины — числа очков, выпадающих при однократном бросании игральной кости.

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

- Найти мат.ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины.

Решение

$$M(X)=\frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)=\frac{21}{6}=3,5$$

$$M(X^2)=\frac{1}{6}(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2)=\frac{91}{6}$$

$$(M(X))^2=(3,5)^2=\frac{49}{36}$$

$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2=\frac{91}{6}-\frac{49}{36}=\frac{497}{36}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\frac{497}{36}}=\frac{22,3}{6}=3,7$$

Пример 3

- Вероятность безотказной работы в течение гарантийного срока для телевизоров первого типа равна 0,9, второго типа – 0,7, третьего типа – 0,8.
- Случайная величина X – число телевизоров, проработавших гарантийный срок, из трех телевизоров разных типов.
- Построить ряд распределения случайной величины.
- Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

Решение

- По условию $p_1=0,9;\ p_2=0,7;\ p_3=0,8$ – вероятности безотказной работы в течение гарантийного срока телевизоров соответствующих типов.
- Тогда вероятности их отказа: $q_1=0,1;\ q_2=0,3;\ q_3=0,2$
- Используя теоремы умножения вероятностей независимых и сложения несовместных событий, составим закон распределения случайной величины Х – количества телевизоров, проработавших гарантийный срок, среди трех телевизоров
- $x=0$ (все телевизоры вышли из строя)

$$p(0)=q_1q_2q_3=0,1\cdot 0,3\cdot 0,2=0,006$$

Решение

- *x=1*

$$p(1) = p_1 q_2 q_3 + q_1 p_2 q_3 + q_1 q_2 p_3 =$$
$$= 0,9 \cdot 0,3 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,7 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,3 \cdot 0,8 = 0,092$$

- *x=2*

$$p(2) = p_1 p_2 q_3 + p_1 q_2 p_3 + q_1 p_2 p_3 =$$
$$= 0,9 \cdot 0,7 \cdot 0,2 + 0,9 \cdot 0,3 \cdot 0,8 + 0,1 \cdot 0,7 \cdot 0,8 = 0,398$$

- *x=3* (все телевизоры проработали гарантийный срок)

$$p(3) = p_1 p_2 p_3 = 0,9 \cdot 0,7 \cdot 0,8 = 0,504$$

Решение

- Закон распределения имеет вид

x_i	0	1	2	3
p_i	0,006	0,092	0,398	0,604

$$M(X) = 0 \cdot 0,006 + 1 \cdot 0,092 + 2 \cdot 0,398 + 3 \cdot 0,604 = 2,4$$

$$M(X^2) = 0,092 \cdot 1^2 + 0,398 \cdot 2^2 + 0,604 \cdot 3^2 = 6,22$$

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 6,22 - (2,4)^2 = 0,46$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0,46} = 0,68$$

Пример №4

- Найти мат.ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины.

x_i	-2	0	3	7
p_i	0,4	0,1	0,2	0,3

Пример №5

- Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение ДСВ

x_i	12	16	20	25	30
p_i	0,2	0,1	0,4	0,1	0,2

Пример №6

В пяти аптеках проверяется годовой баланс. Вероятность правильного оформления баланса в каждой аптеке равна 0,7. Найти математическое ожидание и дисперсию правильно оформленных балансов.

Решение.

По условию n=5; p=0,7;

q=1-0,7=0,3.

$$M\left(X\right)=5\cdot 0{,}7=3{,}5;$$

$$D\left(X\right)=5\cdot 0{,}7\cdot 0{,}3=1{,}05.$$